

Mathématiques, calcul numérique et lycée

2 décembre 2009

Claude Gomez
Directeur du consortium Scilab

Plan

- Le calcul numérique
- Le logiciel Scilab
- Scilab au lycée

Le calcul numérique

Résolution d'équations

Trouver x solution de $f(x) = 0$

Recherche de zéros de polynômes avec Maple

> `eq:=x^2+4*x+1=0; solve(eq);`

$$eq := x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$-2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}$$

> `eq:=x^3-x^2+x+1=0; solve(eq);`

$$eq := x^3 - x^2 + x + 1 = 0$$

$$-\frac{(17 + 3\sqrt{33})^{(1/3)}}{3} + \frac{2}{3(17 + 3\sqrt{33})^{(1/3)}} + \frac{1}{3},$$

$$\frac{(17 + 3\sqrt{33})^{(1/3)}}{6} - \frac{1}{3(17 + 3\sqrt{33})^{(1/3)}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}\left(-\frac{(17 + 3\sqrt{33})^{(1/3)}}{3} - \frac{2}{3(17 + 3\sqrt{33})^{(1/3)}}\right),$$

$$\frac{(17 + 3\sqrt{33})^{(1/3)}}{6} - \frac{1}{3(17 + 3\sqrt{33})^{(1/3)}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}\left(-\frac{(17 + 3\sqrt{33})^{(1/3)}}{3} - \frac{2}{3(17 + 3\sqrt{33})^{(1/3)}}\right)$$

> **eq:=x^4+x^3-x^2+x+2; solve(eq);**

$$eq := x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$$

$$-1, -\frac{(27 + 3\sqrt{78})^{(1/3)}}{3} - \frac{1}{(27 + 3\sqrt{78})^{(1/3)}},$$

$$\frac{(27 + 3\sqrt{78})^{(1/3)}}{6} + \frac{1}{2(27 + 3\sqrt{78})^{(1/3)}} + \frac{1}{2}I\sqrt{3} \left(-\frac{(27 + 3\sqrt{78})^{(1/3)}}{3} + \frac{1}{(27 + 3\sqrt{78})^{(1/3)}} \right),$$

$$\frac{(27 + 3\sqrt{78})^{(1/3)}}{6} + \frac{1}{2(27 + 3\sqrt{78})^{(1/3)}} - \frac{1}{2}I\sqrt{3} \left(-\frac{(27 + 3\sqrt{78})^{(1/3)}}{3} + \frac{1}{(27 + 3\sqrt{78})^{(1/3)}} \right)$$

```
> eq:=x^5+x^4+4*x^3-2*x^2+3*x+1; solve(eq);
```

$$eq := x^5 + x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

```
RootOf(_Z^5 + _Z^4 + 4 _Z^3 - 2 _Z^2 + 3 _Z + 1, index = 1),
```

```
RootOf(_Z^5 + _Z^4 + 4 _Z^3 - 2 _Z^2 + 3 _Z + 1, index = 2),
```

```
RootOf(_Z^5 + _Z^4 + 4 _Z^3 - 2 _Z^2 + 3 _Z + 1, index = 3),
```

```
RootOf(_Z^5 + _Z^4 + 4 _Z^3 - 2 _Z^2 + 3 _Z + 1, index = 4),
```

```
RootOf(_Z^5 + _Z^4 + 4 _Z^3 - 2 _Z^2 + 3 _Z + 1, index = 5)
```

Mais dès le degré 5, pas de solution analytique générale

Résolution d'équations différentielles

Trouver $y(x)$ solution de $y'(x) = f(x, y(x))$

Résolution avec Maple

> `eq:={diff(y(x),x)=y(x)^2,y(0)=1};`

$$eq := \{y(0) = 1, \frac{d}{dx} y(x) = y(x)^2\}$$

> `dsolve(eq);`

$$y(x) = -\frac{1}{x-1}$$

> `eq:={diff(y(x),x)=y(x)^2-x,y(0)=0};`

$$eq := \{y(0) = 0, \frac{d}{dx} y(x) = y(x)^2 - x\}$$

> `s:=dsolve(eq);`

$$s := y(x) = -\frac{\sqrt{3} \operatorname{AiryAi}(1, x) + \operatorname{AiryBi}(1, x)}{\sqrt{3} \operatorname{AiryAi}(x) + \operatorname{AiryBi}(x)}$$

- The Airy wave functions `AiryAi` and `AiryBi` are linearly independent solutions for w in the equation $w'' - z*w=0$. Specifically,

$$\operatorname{AiryAi}(z) = c1*0F1\left(\ ; \frac{2}{3}; z^{3/9}\right) - c2*z*0F1\left(\ ; \frac{4}{3}; z^{3/9}\right)$$

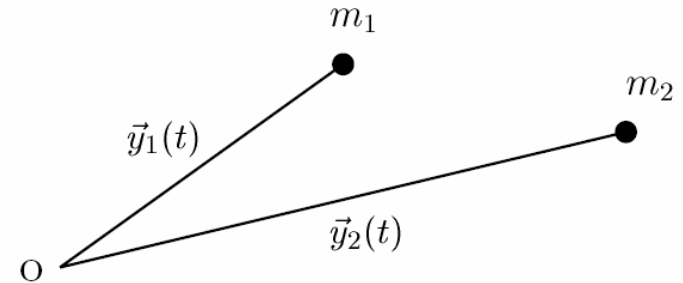
$$\operatorname{AiryBi}(z) = 3^{(1/2)} * [c1*0F1\left(\ ; \frac{2}{3}; z^{3/9}\right) + c2*z*0F1\left(\ ; \frac{4}{3}; z^{3/9}\right)]$$

where `0F1` is the generalized hypergeometric function, $c1 = \operatorname{AiryAi}(0)$ and $c2 = -\operatorname{AiryAi}'(0)$.

- Là encore pas de solution analytique, même pour de simples équations différentielles.
- La solution est donnée en fonction de fonctions spéciales elles-mêmes solutions d'équations différentielles !

Mécanique : le problème des 2 corps

Gravitation universelle



– 6 équations :

$$\begin{cases} m_1 \vec{y}_1''(t) = G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{y}_2(t) - \vec{y}_1(t)\|^2} \frac{\vec{y}_2(t) - \vec{y}_1(t)}{\|\vec{y}_2(t) - \vec{y}_1(t)\|} \\ m_2 \vec{y}_2''(t) = G \frac{m_2 m_1}{\|\vec{y}_1(t) - \vec{y}_2(t)\|^2} \frac{\vec{y}_1(t) - \vec{y}_2(t)}{\|\vec{y}_1(t) - \vec{y}_2(t)\|} \end{cases}$$

Le problème des 3 corps : ?

Résolution de systèmes linéaires

Trouver x solution de $Ax = b$

Calcul avec Maple

```
> with (LinearAlgebra) :
```

```
> A:=RandomMatrix(4,4) ;
```

$$A := \begin{bmatrix} -93 & -32 & 8 & 44 \\ -76 & -74 & 69 & 92 \\ -72 & -4 & 99 & -31 \\ -2 & 27 & 29 & 67 \end{bmatrix}$$

```
> b:=RandomVector(4) ;
```

$$b := \begin{bmatrix} -98 \\ -77 \\ 57 \\ 27 \end{bmatrix}$$

```
> LinearSolve(A,b) ;
```

$$\begin{bmatrix} 44262826 \\ 64334045 \\ 53802696 \\ 64334045 \\ 64417651 \\ 64334045 \\ -22317012 \\ 64334045 \end{bmatrix}$$

Solution exacte d'un
système linéaire

```
> A:=RandomMatrix(150,150): b:=RandomVector(150):
```

```
> x:=LinearSolve(A,b):
```

$$x := \begin{bmatrix} 150 \text{ Element Column Vector} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran_order} \end{bmatrix}$$

```
> x[1]:
```

```
1394913480700029875167484659521260924662732528885306627810237838000711750\  
3134213141608825409585429193891548289535693963698212430596672109860398978\  
3005008012633407572562002907234880670406696065412995917918179098094133693\  
6544124208773951459716264900034509408947837402299625062772389453041133304\  
3393487831429213116813313735008088088683045230843312648755998650206403769\  
7033179484431896550733000540038 / 4303388994473466931800275301387851478\  
3728463642662694821027687779895371315526475085797028668173355642917973656\  
9268925194436762735630060273470793233835197577719909559599214205732327458\  
7531681382423732755681378973735711177498896297666948810231495709064083563\  
4366504095386529096247697082538664010195063677271837196345032446500424000\  
262106729766570148614670449998455579103041984610344910351656086587
```

Mais pour une matrice 100 X 100, les nombres exacts deviennent trop grands et le temps de calcul trop long

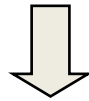
Le calcul symbolique ne suffit pas

Solution

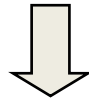
- Utiliser des algorithmes « approchés »
- Utiliser des valeurs « approchées »

Qu'est-ce qu'une valeur « approchée » ?

Faire des calculs rapides



Utiliser des « mots machine »



Comment représenter les nombres
dans ces « mots machine » ?

Nombres réels et ordinateurs

- Problème intrinsèque : types informatiques *finis*.
- Typiquement, au plus 64 bits = 2^{64} valeurs ;
- “Faire rentrer” de l’infini dans du fini : modèle des nombres réels ;
- Trois aspects :
 - Choisir un sous-ensemble fini de l’ensemble à représenter (ici réels) ;
 - Définir des opérations *sur ce sous-ensemble* ;
 - Évaluer l’écart entre ce “modèle” et la réalité.

Nombres réels et ordinateurs (2)

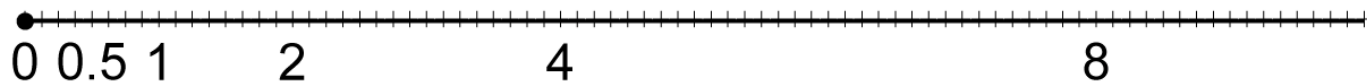
- Sur les entiers, facile : entiers modulo 2^{64} ;
 - \hookrightarrow opérations “naturelles” ;
 - (presque) compatible avec les opérations entières
 - pas d'« amplification » de l'erreur
 - on perd uniquement les bits de poids fort
- Sur les réels, difficile ;
 - pour les raisons inverses...
 - on perd les bits de poids faible (comment ? combien ?)
- Notion de *précision* $p \rightarrow$ nombre représentable en précision p , \mathcal{R}_p ;

Nombres réels et ordinateurs (3)

- Idée 1 : précision *absolue*.

$$R_{p,q} = \{|x| < 2^q \text{ avec } p \text{ chiffres binaires après la virgule}\}.$$

- Chaque nombre correspond à un intervalle réel de taille $\Delta x \approx 2^{-p}$; l'erreur commise est *constante*.
- Beaucoup de chiffres significatifs quand x grand, très peu quand x petit.
- Allure de $R_{p,q}$:



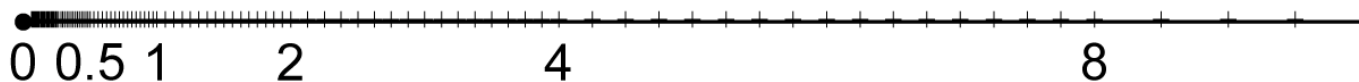
virgule fixe.

Nombres réels et ordinateurs (4)

- Idée 2 : précision relative : précision absolue augmente quand le nombre diminue.

$$R_{p,q} = \{x = \pm(m \cdot 2^{-p}) \cdot 2^e, |e| \leq q, m \in [2^{p-1}, 2^p[\text{ entier}]\}.$$

- m = mantisse, e = exposant.
- Toujours p chiffres après la virgule, mais la virgule “flotte” : elle se déplace en tête du nombre (position e).
- $x \neq 0 \leftrightarrow$ intervalle de taille Δx avec $\Delta x/x \approx 2^{-p}$. L'erreur commise est *relative* ;
- Nombre de chiffres significatifs constant ;
- Allure de $R_{p,q}$:

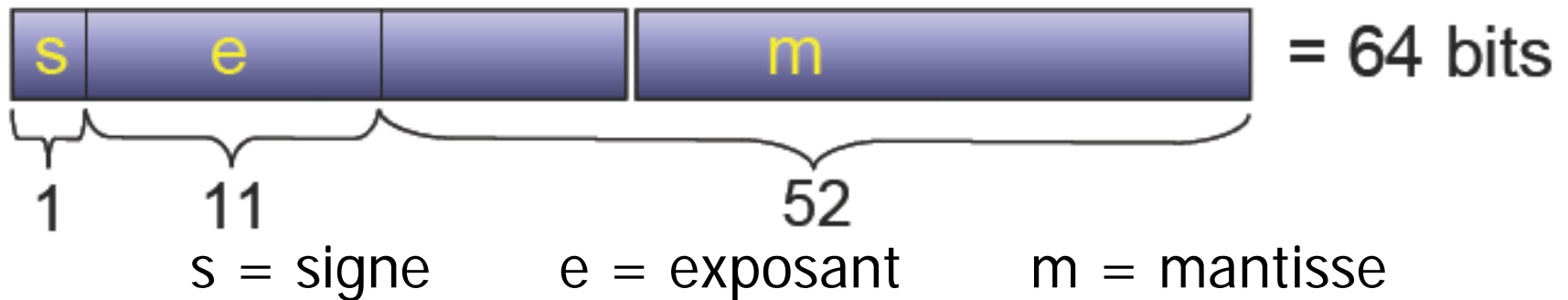


virgule flottante.



La norme IEEE-754

Double précision = 2 X 32 bits



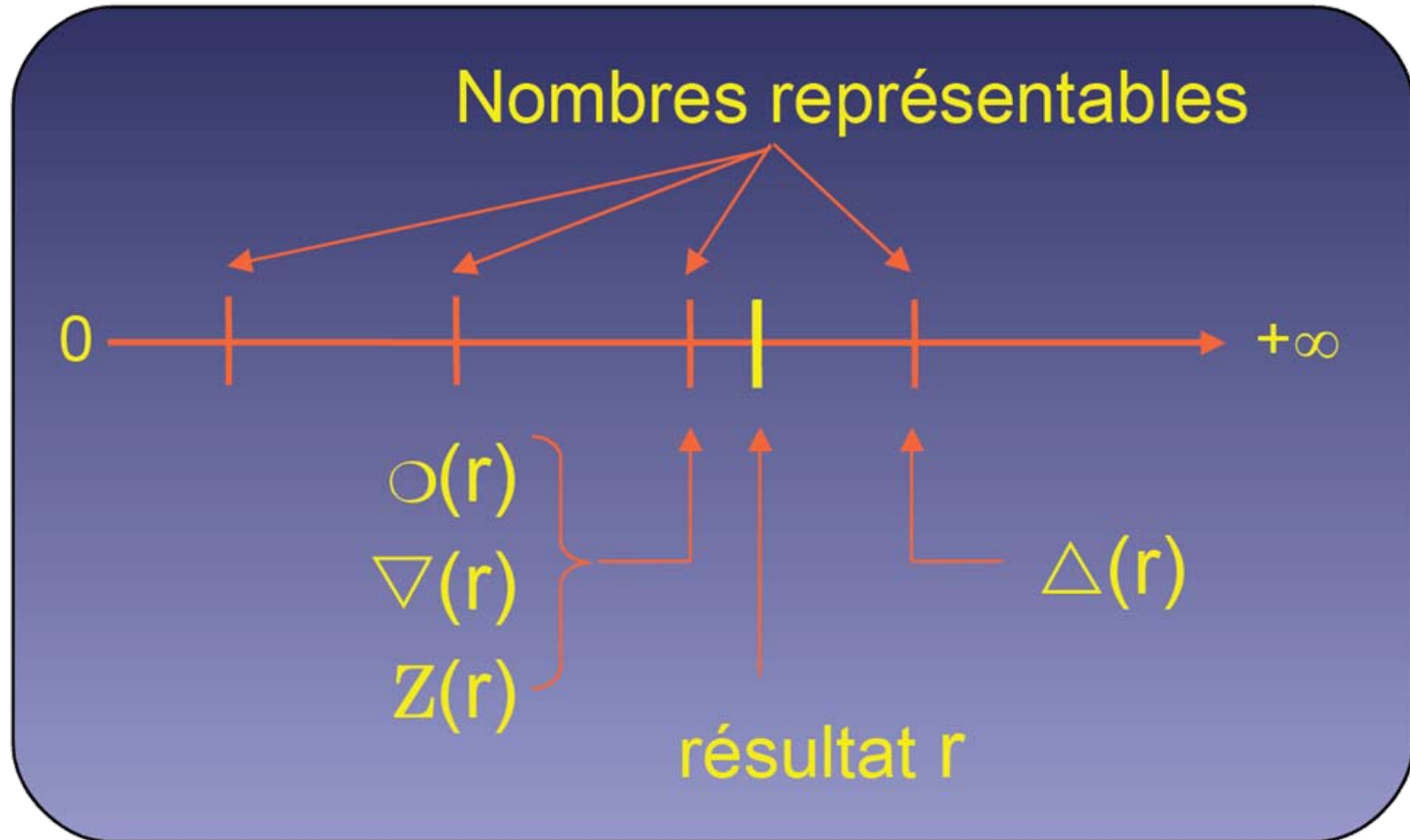
$$\text{Nombre} = (-1)^s \times 2^{e-1023} \times 1.m$$

$$\text{Nombre min} = 2,225... 10^{-308}$$

$$\text{Nombre max} = 1,797... 10^{308}$$

$$\text{Précision} = 2,220446049 \times 10^{-16} \text{ soit 16 chiffres max}$$

Définition d'un arrondi correct pour $+$, $-$, \times , \div , $\sqrt{}$



Exemple du calcul de $\sin(\pi)$

Valeur approchée de π : $\frac{884279719003555}{2^{48}}$

Valeur approchée de $\sin(\pi)$: $\frac{4967757600021511}{2^{105}}$

soit : $1,224646799 \times 10^{-16}$

Vérification avec Maple

> **p:=884279719003555/2^48;**

$$p := \frac{884279719003555}{281474976710656} \quad \leq \text{valeur de } \pi \text{ selon IEEE-754}$$

> **evalf(Pi,30);evalf(p,30);**

3.14159265358979323846264338328

3.14159265358979311599796346854 \leq égal à π à 10^{-16} près

> **evalf(Pi-p,30);**

0.12246467991474 10^{-15}

> **s:=sin(p);**

$$s := \sin\left(\frac{884279719003555}{281474976710656}\right)$$

> **evalf(s,30);**

0.122464679914739502884197169399 10^{-15}



Bonne valeur de $\sin(\ll \text{valeur approchée de } \pi \gg)$

Avantages

Toutes les machines ont le même comportement numérique pour l'arithmétique

Inconvénients

- Les fonctions élémentaires ne sont spécifiées que depuis 2008
- Restent les problèmes de précision

Exemples en Scilab


```
-->sin(%pi)
```

```
ans =
```

1.224646799D-16 $\leq 10^{-16}$ équivaut ici à 0 en valeur relative

```
-->sin(%pi*10^10)
```

\leq ces puissances de π ne sont pas assez précises

```
ans =
```

- 0.0000022393628

```
-->sin(%pi*10^15)
```

```
ans =
```

- 0.2362090532517

```
-->%eps
```

```
%eps =
```

```
2.220446049D-16
```

<= précision relative minimale

```
-->format(20)
```

<= on affiche 20 chiffres

```
-->1+%eps
```

```
ans =
```

```
1.00000000000000000022
```

```
-->1+%eps/2
```

<= %eps/2 vaut 0 par rapport à 1

```
ans =
```

```
1.
```

```
-->(1+%eps/2+%eps/2)-  
(1+%eps)
```

<= ((1+%eps/2)+%eps/2) vaut 1

```
ans =
```

```
- 0.00000000000000000022
```

Le numérique en précision arbitraire

Exemple : calcul de $e^{\pi\sqrt{163}} - 262537412640768744$

Scilab

```
-->exp(%pi*sqrt(163))-262537412640768744
```

```
ans =
```

```
- 480.
```

Ce résultat est faux car le calcul de $e^{\pi\sqrt{163}}$ n'est pas fait avec assez de précision

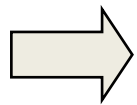
Maple

```
> v:=exp(Pi*sqrt(163))-262537412640768744;  
v := e( $\pi\sqrt{163}$ ) - 262537412640768744  
> evalf(v);  
-0.29 1010  
> Digits;  
10  
> Digits:=20: evalf(v);  
0.43  
> Digits:=30: evalf(v);  
0.24 10-10  
> Digits:=40: evalf(v);  
-0.7499274056 10-12  
> Digits:=50: evalf(v);  
-0.74992740280181431135 10-12
```

If faut faire un calcul avec 40 chiffres pour arriver à un bon résultat

Le calcul numérique en précision arbitraire est donc incontournable dans certains domaines :

- Résolution de systèmes d'équations polynomiales : robotique



Arithmétique d'intervalles, calcul certifié

Le logiciel Scilab

Comment faire du calcul numérique ?

- Les logiciels de calcul formel
- La calculatrice
- Le tableur

Mieux : les logiciels de calcul numérique !

Les logiciels de calcul numérique

- Matlab : **commercial et cher**
- Scilab : **libre et gratuit**

Avantages

- Programmation facile
- Algorithmes performants
- Larges domaines d'application
- Tracé de graphiques faciles

Ce sont ces logiciels qui sont utilisés par les ingénieurs, les universitaires, les chercheurs

Caractéristiques importantes

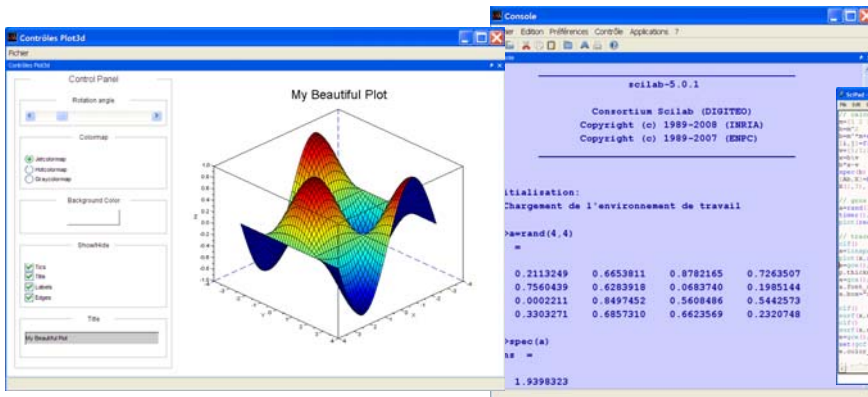
- Pas de variables formelles
- Les objets de base sont les vecteurs et les matrices
- Tous les calculs sont numériques : ils suivent la norme IEEE-754

Le logiciel Scilab : qu'est-ce que c'est ?

Librairies de calcul : plus de 1700 fonctions

- Fonctions mathématiques
- Calcul matriciel, matrices creuses
- Polynômes et fractions rationnelles
- Simulation : systèmes d'équations différentielles
- Commande classique et robuste, optimisation LMI
- Optimisation différentiable et non différentiable
- Interpolation, approximation
- Traitement du signal
- Statistiques
- Graphes et réseaux
- Xcos : simulateur bloc diagramme pour les systèmes dynamiques

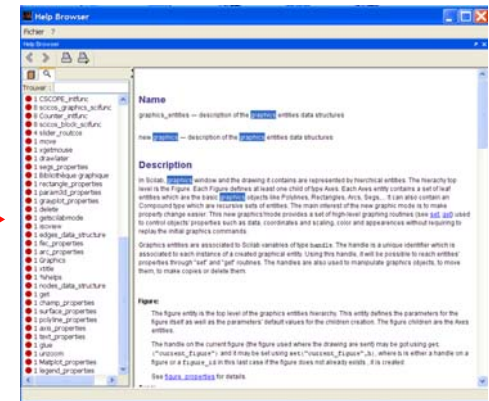
Utilisateur



Graphique 2D/3D
Animation

Langage
Interpréteur

Éditeur

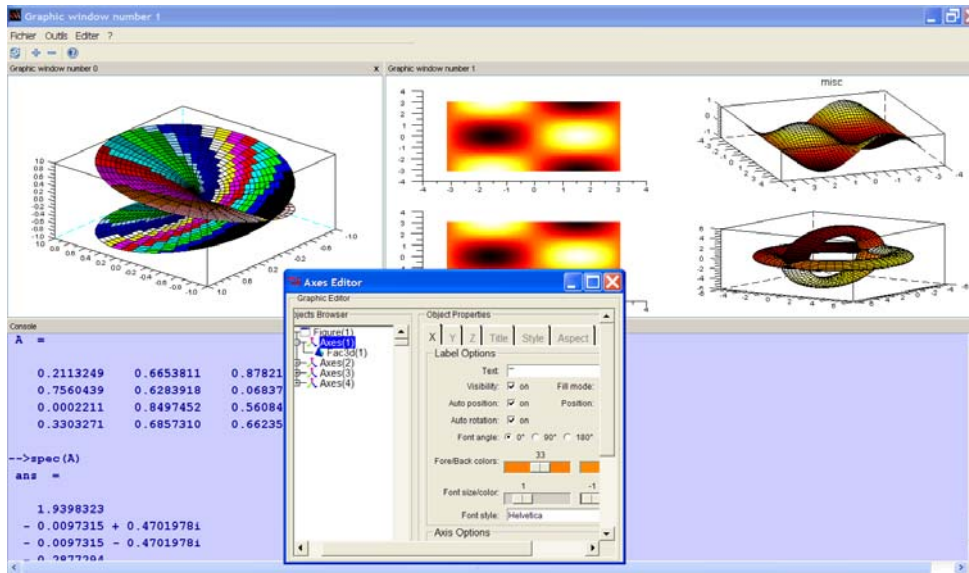


Aide en ligne

Dernière version : Scilab 5.2 (mi décembre 2009)

Nouveautés :

- Éditeur intégré
- Gestion des modules : ATOMS
- Version MacOSX finale
- Module Xcos

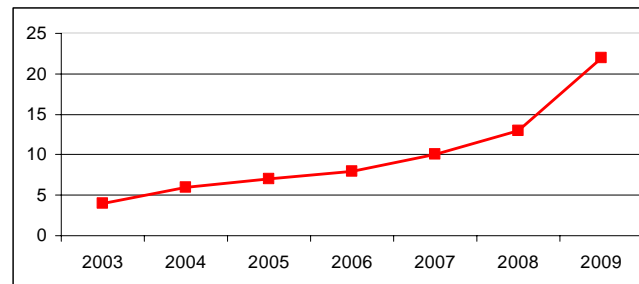


Le consortium Scilab

- Hébergé dans la fondation **digiteo**
 - Un soutien fort de l'  **INRIA**
 - Un consortium de partenaires
 - Des projets collaboratifs et industriels
- Une structure adaptée
 - Une équipe de R&D pérenne en fort développement

+

Une offre de services en 2010



Nombre de personnes de l'équipe R&D

Le consortium Scilab aujourd'hui

Académiques



Organismes publics



CENTRE NATIONAL D'ÉTUDES SPATIALES



Recherche en sciences & technologies de l'information

INSTITUT NATIONAL
DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE
ET EN AUTOMATIQUE

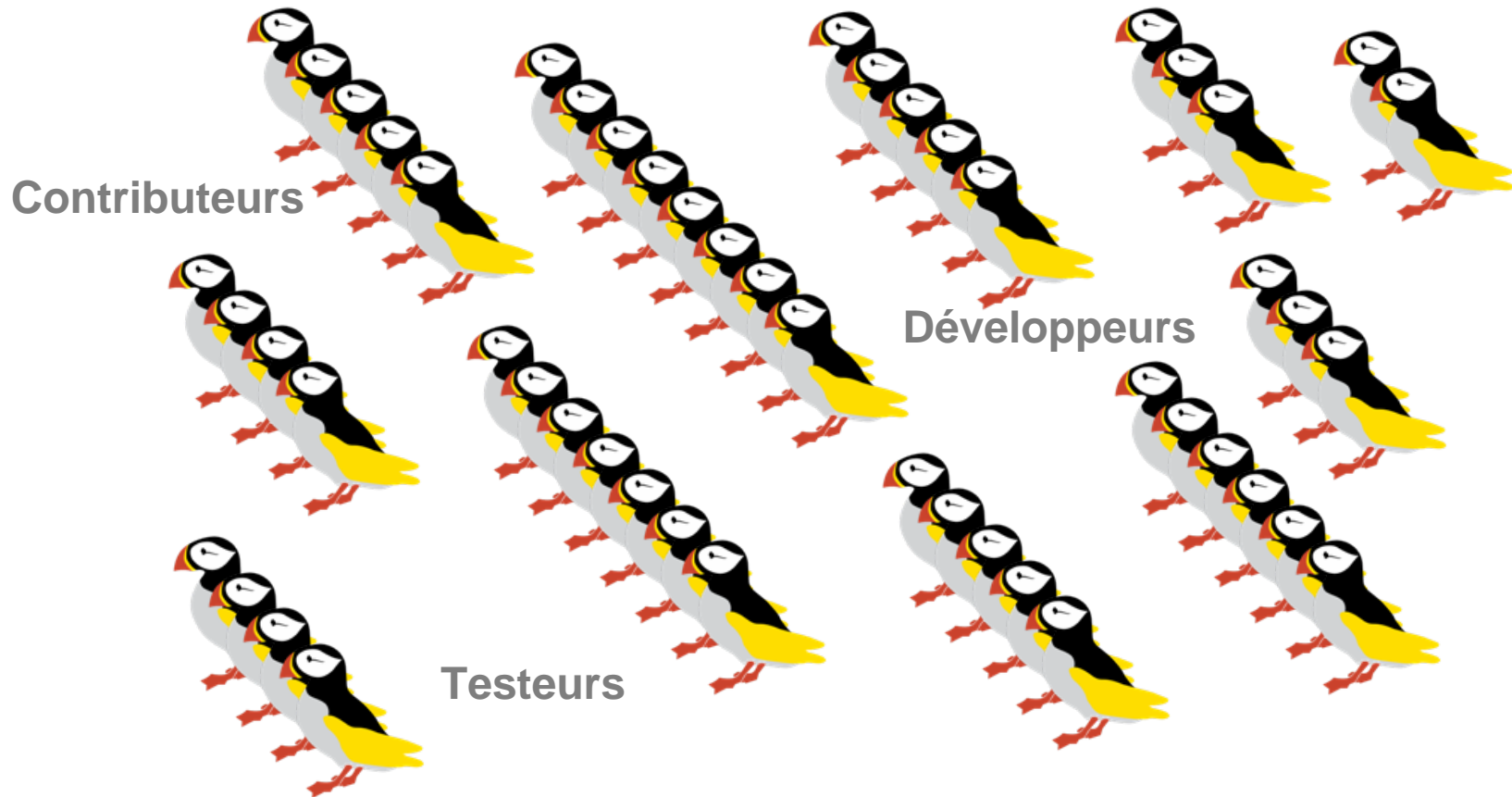


Industriels



PSA PEUGEOT CITROËN

Le soutien de la communauté



Scilab au lycée

Scilab utilisé en classes de BCPST

Scilab utilisé dans les classes de STS CIRA

Utilisation de Scilab dans le secondaire en mathématiques

- Algorithmique en seconde
- Enseignement de détermination « Informatique et objets numériques » en seconde dans l'académie de Versailles
- Utilisation individuelle...

Formations Scilab depuis 2008 dans l'académie de Versailles

Pourquoi utiliser Scilab au lycée ?

Logiciel gratuit : peut être installé partout

- Par les enseignants et les élèves au lycée
- Par les enseignants et les élèves à la maison

Logiciel puissant :

- Super calculateur graphique simple et rapide
- Programmation facile

Logiciel utilisé dans la vie professionnelle

- À l'université et les écoles d'ingénieur, dans la recherche, dans les entreprises

Mais aussi pour l'algorithmique

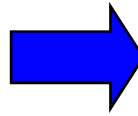
Les trois structures de base :

- Boucle
- Test
- Fonction

Avec un langage simple à utiliser

Boucle

$$\begin{cases} u(1) = 1 \\ u(n+1) = 2u(n) + 2n \end{cases}$$

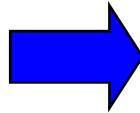


```
u(1)=1;  
for i=1:10  
    u(n+1)=2*u(n)+2*n;  
end
```

Test

La suite de Syracuse :

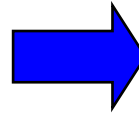
$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$



```
u(1)=N; n=1;  
while u(n)<>1  
    if pair(u(n)) then  
        u(n+1)=u(n)/2  
    else  
        u(n+1)=3*u(n)+1  
    end  
    n=n+1;  
end
```

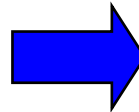
Fonction

$$f : f(x) = \cos(x) + x^2$$



```
function y=f(x);  
    y=cos(x)+x^2;  
endfunction
```

$$f : f(x, y) = \cos(x)\cos(y)$$



```
function z=f(x,y);  
    z=cos(x)*cos(y);  
endfunction
```

Introduction de la notion de variables

Pour cela : le module Scilab pour les lycées

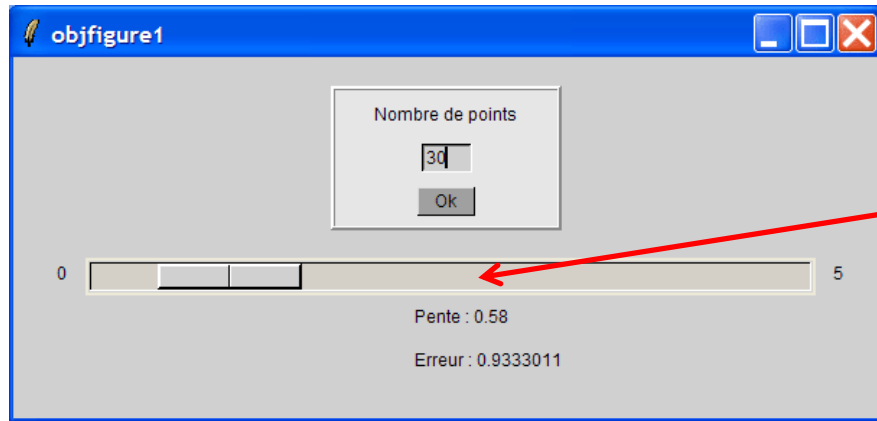
Des activités à montrer aux élèves

Ajustement affine interactif :

- Trouver la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés pour une série statistique et calcul de la somme des carrés des distances

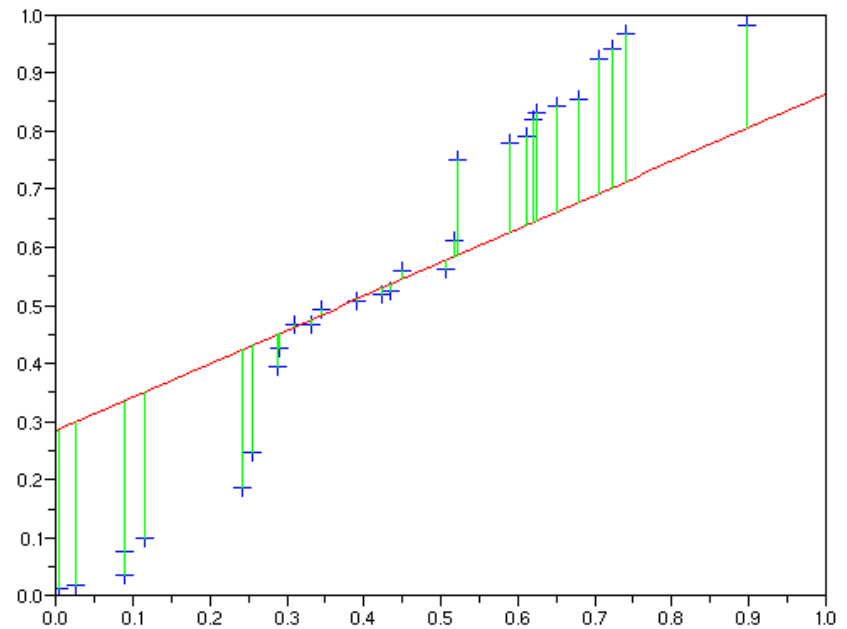
Encadrement d'une intégrale :

- Valeur approchée par la somme des aires des rectangles



Le curseur qui donne la pente et l'erreur correspondante

La courbe de régression correspondante :



56 fonctions adaptées

- Analyse
- Arithmétique
- Graphique
- Probabilités et statistiques
- Ensembles
- Utilitaires

- Analyse : `ln`
- Arithmétique :
 - `pair, impair`
 - `quotient, reste`
 - `pgcd, ppcm`
 - `premier, liste_premiers, numero_premiers, factorise, diviseurs`
 - `change_base`
- Graphique :
 - `orthonorme, quadrillage, graduations`
 - `cliquer`

Exemples d'arithmétique

```
-->l=liste_premiers(1000000);
```

```
-->pgcd(1931911,4288507)
```

```
ans =  
541.
```

```
-->factorise(10291181709984)
```

```
ans =  
2. 2. 2. 2. 2. 3. 7. 541. 3571. 7927.
```

```
-->diviseurs(12456)
```

```
ans =  
column 1 to 14  
1. 2. 3. 4. 6. 8. 9. 12. 18. 24. 36. 72. 173. 346.  
column 15 to 24  
519. 692. 1038. 1384. 1557. 2076. 3114. 4152. 6228. 12456.
```

— Probabilités et statistiques :

- `factorielle`, `arrangement`, `combinaison`
- `tirage_entier`, `tirage_reel`, `frequence`, `frequence_tirage_entier`,
- `moyenne`, `moyenne_ponderee`, `ecart_type`, `ecart_type_pondere`, `mediane`, `mediane_ponderee`, `quartiles`, `quartiles_ponderes`, `deciles`, `deciles_ponderes`
- `loi_exp`, `loi_normale`
- `regression_y_en_x`
- `histogramme`

```
-->f=frequence_tirage_entier(1000000,1,6)
```

```
f =
```

```
0.166697  0.166783  0.166435  0.166406  0.167319  0.16636
```

Exemple de statistiques

```
-->a=[0,10,15,20,40]
```

```
a =
```

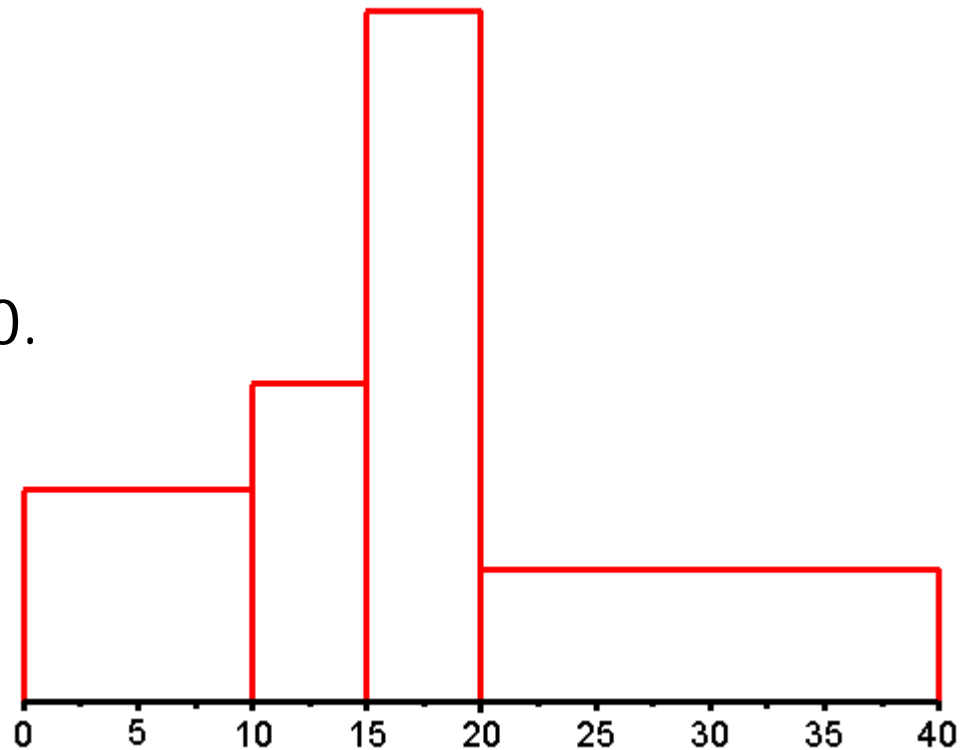
```
0.  10.  15.  20.  40.
```

```
-->n=[8,6,13,10]
```

```
n =
```

```
8.  6.  13.  10.
```

```
-->histogramme(a,n,"r")
```



— Ensembles :

- `ensemble`, `ajouter`, `enlever`
- `inclus`, `appartient`
- `difference`, `intersection`, `union`
- `tirage_ensemble`
- `valeur`

— Utilitaires :

- `lycee`
- `taille`, `trier`, `afficher`

```
-->s=ensemble("b","a","c","a","d","e","g")
```

s = <= Un ensemble : pas d'élément répété, ordre
{a,b,c,d,e,g} alphabétique

Un ensemble de billets, 2 de 20 €, 1 de 50 €, 2 de 100 €, 1 de 200 € :

```
-->p=ensemble("a(20)","b(20)","a(50)","a(100)","b(100)","a(200)")
```

p =
{a(100),a(20),a(200),a(50),b(100),b(20)}

```
-->t=tirage_ensemble(2,p)
```

t = <= on tire au hasard 2 billets
{a(200),a(50)}

```
-->v=valeur(t)
```

v =
200. 50. <= valeur des billets

```
-->sum(v)
```

ans = <= calcul de leur somme
250.

Le livret Scilab pour les lycées

- Une prise en main de Scilab
- Des exemples d'utilisation en mathématiques dans le secondaire

Une page Web dédiée : www.scilab.org/lycee

Une mailing list : lycee@lists.scilab.org

Conclusion

Même si les calculs sont approchés...

**Utilisez Scilab
dans vos
classes**



www.scilab.org